

CONEXIONES ENTRE DOMINIOS MATEMÁTICOS DISTINTOS: EL CASO DE LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA BÁSICAS.

RESPONSABLE: DOCTORA VERÓNICA HOYOS AGUILAR

AREA DEL CONOCIMIENTO: CIENCIAS SOCIALES

DISCIPLINA: EDUCACIÓN

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICA C. DEL APRENDIZAJE

INSTITUCIÓN RESPONSABLE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

**DEPENDENCIA: ÁREA DE INVESTIGACIÓN, POSGRADO EN EDUCACIÓN
ANO, 1999.**

Planteamiento

La abstracción es una característica fundamental de las matemáticas, es un factor presente en los contenidos matemáticos escolares que motiva la búsqueda en didáctica. Así, existen múltiples tentativas para rebasar las dificultades de aprendizaje o obstáculos al respecto, en particular buscando establecer una relación entre matemáticas y mundo material a través de la búsqueda de situaciones o problemas concretos que muchas veces fracasan sobre lo que en el fondo es la complejidad de un proceso de modelación de lo real.

Así, en las palabras de presentación del equipo EIAH (ver Nota1), la informática abre una vía original de resolución de este problema permitiendo el acceso a realidades artificiales que tienen la particularidad de materializar fenómenos reales por medio de las mismas matemáticas. El usuario, aprendiz o matemático, puede razonablemente imaginarse involucrado en estas realidades artificiales, manipulando y construyendo objetos, estableciendo relaciones, y analizando los fenómenos que así resultan.

Por otro lado, tal vez la materia a la que más se aplica tal característica de ser abstracta, en nuestro sistema de educación básica, sea el álgebra. En particular, resultados de investigación (cf. Hoyos, V., 1996-1998a) revelan que en general los estudiantes al término de la educación matemática básica en la materia -estamos incluyendo aquí los dos primeros años del bachillerato, no cuentan con recursos matemáticos que les permitan controlar sus ejecuciones algebraicas usuales en este nivel educativo, como son la resolución de ecuaciones, los despejes, las transformaciones algebraicas por factorización o por reducción de términos semejantes, etc. Así, en la investigación subsecuente planteada por Hoyos (1997, ver Nota2) se concibió un experimento de enseñanza basado en la elaboración y montaje de escenarios de aprendizaje que incorporaran el uso de un medio ambiente informático -el micromundo Cabri-II (ver nota3) y en donde se buscaba el establecimiento de conexiones entre el marco algebraico (ecuaciones en dos variables) y el marco gráfico-cartesiano (curvas).

De acuerdo con la investigación efectuada por Hoyos y Capponi (1998b, <http://www.erne.uni-osnabrueck.de/erne98.html>) al respecto, llevada a cabo con estudiantes del primer año del bachillerato francés (alumnos de 'seconde', de aprox.16

años de edad), el montaje y la estructuración de los escenarios de aprendizaje construidos reportó los siguientes resultados: puestos los alumnos en una situación de resolución de una desigualdad algebraica -tarea que usualmente enfrentan de manera puramente sintáctica (de ejecución de reglas de manipulación simbólica), los estudiantes acudieron espontáneamente a la revisión de sus propios procedimientos de resolución, comparando resultados derivados de una resolución gráfica y una sintáctica. Es decir que los estudiantes utilizaron recursos de graficación como medio de control de sus manipulaciones algebraicas usuales (ver Nota4).

Si bien los resultados observados hacen aparecer el enfoque adoptado como exitoso, es necesario hacer notar que la consecución del experimento de enseñanza dependió de la participación de alumnos voluntarios en varias sesiones de trabajo práctico dirigido, fuera de la clase. Además, también es necesario tener indicadores de la influencia del factor cultural en el éxito de una propuesta didáctica como la instrumentada. Por ello es que se impone una réplica en México que recree el experimento de enseñanza realizado en Francia. Esto ratificaría la validez de las construcciones prácticas y teóricas ya elaboradas, además de que en última instancia el objetivo de realización de estudios o proyectos fuera del país es que estos encuentren aquí un campo de aplicación natural.

Justificación

Actualmente, el cambio de programas de estudio de la asignatura de matemáticas en el bachillerato mexicano (en particular en el CCH) pugna durante los tres primeros semestres de este nivel educativo por un enfoque integrador de dos de los dominios matemáticos básicos: la geometría y el álgebra. Sin embargo, la enseñanza alternativa de las temáticas de álgebra y/o de geometría continúa haciéndolos aparecer separados o disconexos. Además, usualmente cuando en la enseñanza se aborda el campo propio para tal vinculación -la geometría analítica, la sistematicidad del enfoque tradicional hasta ahora adoptado propicia que los estudiantes consideren al álgebra como un recetario (¿cuál es la fórmula?, cf. Hoyos, V. 1996. La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico, Tesis de Doctorado, México:CINVESTAV). Generalmente, este significado asignado por los estudiantes al álgebra escolar impide el que lleven a cabo consideraciones de tipo analítico cuando están, por ejemplo, en una situación de descripción de invariantes geométricos.

Y a la inversa, cuando al estudiante se le enfrenta a una tarea reconocida como algebraica (resolución de una ecuación o de una desigualdad, por ejemplo), generalmente no acude a la utilización de otros recursos (los gráficos, por ejemplo) que le permitan controlar sus ejecuciones algebraicas, las usuales en este nivel escolar (despejes, cambios de signo, etc.).

Así, el proyecto que aquí estamos planteando de explorar la adecuación de los constructos prácticos y teóricos ya elaborados (cf., por ejemplo, Hoyos y Capponi, 1998c) con estudiantes del tercer semestre lectivo del bachillerato mexicano, encuentra un campo de aplicación natural y una utilidad inmediata en el caso del posible establecimiento de vínculos (como los que hemos reportado que aparecen, en el caso de los estudiantes franceses) entre las temáticas del álgebra y la geometría del actual currículum escolar. De cualquier manera dicha exploración es útil desde un punto de

vista teórico, aún si se identificaran posibles dificultades surgidas de la utilización de los escenarios de aprendizaje elaborados en el micromundo CABRI-II, puesto que ello obligaría a la revisión del marco teórico que llevó a la concepción del experimento de enseñanza llevado a cabo.

Descripción General

1.-El proyecto contempla en primera instancia un trabajo de ingeniería didáctica en el Colegio (el CCH-Sur o la Esc. Prepa. No.6). Esto es de análisis y adecuación de los escenarios de aprendizaje ya elaborados a la situaciones de estudio que se sugieren en los programas actuales, en lo que respecta a los tres primeros semestres del plan de estudios vigente. Dado que en el nivel escolar del bachillerato se cuenta con laboratorios de computación, las autoridades del Colegio consideran positiva la propuesta de trabajo del curso de matemáticas III incluyendo sesiones de trabajo práctico en el laboratorio de cómputación, puesto que hay el deseo de apoyar iniciativas de trabajo escolar que pudieran incidir en el decrecimiento del índice de reprobación y deserción en este nivel educativo

2.- Enseguida se trabajaría en la instrumentación de los escenarios de aprendizaje utilizando el micromundo Cabri-II. Para tal efecto se contará con la presencia de un técnico auxiliar de investigación, factor que contribuirá a la fluidez de las sesiones. Además, el trabajo de los estudiantes durante estas sesiones de trabajo práctico serán completamente grabadas utilizando el 'diario de sesión', herramienta tecno-pedagógica del micromundo Cabri-II, con la que se contará previo acuerdo institucional que para este efecto se convendría con el responsable del proyecto Cabri del equipo EIAH en Francia.

3.- Se aplicará una prueba de control, o test, con la idea de probar la aplicación o utilización de representaciones gráficas en la resolución de tareas que usualmente se conciben unicamente como de aplicación de reglas o fórmulas algebraicas (ver cuestionario en parte metodológica).

4.- Enseguida se realizarían unas sesiones de balance y de ajuste con los estudiantes, en el salón de clases y en el laboratorio de computación, a fin de organizar una discusión sobre los resultados obtenidos en el test de control.

5.- Por último, con respecto al trabajo de campo, se realizarían entrevistas a parejas de estudiantes en sesiones de trabajo dirigido. Estas sesiones serán videograbadas y tienen por fin tener registros para hacer análisis a profundidad de las dificultades, logros, y estrategias instrumentadas por los estudiantes durante las sesiones de trabajo dirigido.

6.- Finalmente se elaborará un reporte de investigación en extenso del que se derivarán dos artículos de investigación a presentar en foros internacionales especializados en el tema.

Objetivos y Metas

El objetivo principal del presente proyecto de investigación es el de mejorar la calidad de la educación matemática en el nivel bachillerato y en el nivel básico, comenzando

por adecuar la propuesta desarrollada en Francia al contexto escolar y cultural de los estudiantes mexicanos. Una propuesta educativa de calidad que atraiga el interés de los estudiantes hacia el área científica necesariamente contribuye a abatir el índice de reprobación y deserción que actualmente tienen las materias científicas en este nivel educativo.

A corto plazo, la meta que se contempla es de corte investigativo puesto que se pretende verificar que el enfoque didáctico que se desarrolló en Francia durante la investigación posdoctoral constituye una nueva aportación a la línea de investigación del aprendizaje del álgebra escolar. Los elementos fundamentales del enfoque desarrollado fueron la simulación en un medio ambiente informático de aprendizaje de máquinas de dibujar concretas; la descripción algebraica de las propiedades geométricas invariantes en el trazo realizado; y la representación gráfica de las variables algebraicas.

A largo plazo, vislumbramos una meta de extensión y desarrollo del enfoque didáctico en elaboración: es posible el extender el enfoque didáctico que aquí estamos proponiendo para su realización en la escuela secundaria, actualmente bastante desprovista de medios y materiales educativos para el aprendizaje de las matemáticas. Nuestra propuesta para el nivel de bachillerato partió de la modelización -en un medio ambiente informático de aprendizaje, de máquinas para dibujar, pero estas máquinas en realidad existen. En la Universidad de Modena, en Italia, se cuenta con más de 115 máquinas articuladas para este efecto. La Dra. Mariolina Bartolini Busi es la responsable de este Museo de Historia Científica en Modena. Es posible establecer un convenio con esta Universidad que facilite el acceso y/o la reproducción de dichas máquinas para dibujar. Posteriormente, el diseño de escenarios de aprendizaje para el nivel de secundaria, tendría que contemplar la manipulación concreta de las máquinas; una discusión de las propiedades geométricas invariantes a partir de los trazos realizados y de posibles manipulaciones con el trazo realizado en el papel, etc.; una serie de actividades encaminadas a una reflexión y simbolización de tales propiedades.



Marco Teórico

La computadora: herramienta para la construcción de significados

Uno de los puntos principales del marco teórico que sustenta a esta investigación es el concebir la construcción de significado matemático dentro de un sistema diferenciado de soporte o de ayuda al educando, cuya estructura promueva el establecimiento de conexiones con otras nomenclaturas, con otros dominios matemáticos. De acuerdo con Noss y Hoyles (1996), la idea de construcción de significado bajo un sistema de este tipo apela a la presencia de una estructura sobre la que los estudiantes pueden construir y reconstruir con apoyo (real y virtual) en las maneras que ellos elijan como apropiadas a su esfuerzo de elaboración del significado de las matemáticas en cuestión.

En efecto, Noss y Hoyles (1996) conciben a la computadora integrando un sistema de apoyo educativo en el que forman parte el saber, el estudiante(s), el maestro y el medio ambiente de aprendizaje. Un sistema que tiene varias componentes que lo hacen sumamente ventajoso: a) la fluidez y flexibilidad del ambiente computacional o informático, el cual está bajo el control de los alumnos; b) está disponible el poder señalar posibles trayectorias de uso más que puntualizar hacia una única meta dirigida;

c) hay una estructura local de apoyo, a la cual puede acceder el alumno y que es un producto de la comprensión del estudiante, así como de una comprensión cultural construida por otros sobre ello; d) hay una estructura global de apoyo, la cual llega a ser comprendida por el usuario, y que emerge de conexiones que se van forjando, usándolas, por el usuario.

Escenarios de aprendizaje usando Cabri-II

El micromundo Cabri-II permite integrar un sistema de apoyo educativo de este tipo puesto que sus características de manipulación directa promueven en los estudiantes la percepción de propiedades geométricas invariantes, en palabras de uno de sus autores:

"nous faisons l'hypothèse que l'ordinateur peut guider l'élève dans l'exploration de dessins en l'incitant à repérer des invariants entre plusieurs dessins, invariants pouvant déboucher sur la mise en évidence de notions et propriétés géométriques générales. En effet,... il peut proposer plusieurs dessins représentant un même ensemble de données théoriques."(Cf. Bellemain, F.,1992, p.7).

De hecho, la sólida estructura matemática con la que Cabri-II provee al estudiante es un factor que promueve su avance en la construcción de su conocimiento. Tal estructura, de acuerdo con Noss y Hoyles (1996), es un factor determinante en el desarrollo del significado matemático:

"It is the web of relationships and objects offered by the computer that can act both as a support for developing new meanings, as a means for transcending that support. For by manipulating objects and articulating the relationships between them, a dual action /notational framework is developed which can begin to be a new resource, one which is not so dependent on the medium for its expression."

(cf., Noss, R.& Hoyles, C.,1996, p.126)

Experiencia matemática y la introducción de 'voces' de la historia en el salón de clases
Finalmente, otro aspecto que se ha tenido en cuenta para el diseño de los escenarios en Cabri-II que buscan el establecimiento de vínculos entre el álgebra y la geometría, es el de introducir 'voces' de la historia en el salón de clases -la voz de Descartes en este caso, como un factor adicional que pudiera facilitar al estudiante el establecimiento de vínculos entre esta voz y sus propias interpretaciones. De acuerdo con Boero, P. et al. (1997-98):

"Each of these expressions conveys a content, an organization of the discourse and the cultural horizon of the historical leap. Referring to Bachtin (1968) and Wertsch (1991), we called these expressions 'voices'. Performing suitable task proposed by the teacher, the student may try to make connections between the voice and his/her own interpretations, conceptions, experiences and personal senses (Leontiev, 1978), and produce an écho', i.e. a link with the voice made explicit through a discourse." (Boero, P., et al., 1997-98)

Según Boero et al., existen expresiones culturales que representan -desde un punto de vista comunicativo profundo, importantes saltos en la evolución de las matemáticas y de la ciencia, y es a través de la ejecución de tareas adecuadas (un "juego de voces y ecos") propuestas por el maestro que el estudiante puede tratar de establecer conexiones entre esta 'voz' y sus propias interpretaciones, produciendo un eco o vínculo con ella.

Notas.

1. El equipo de trabajo " Medios Ambientes Informáticos para el Aprendizaje Humano" (EIAH) es un equipo de trabajo del Laboratorio Leibniz, del Instituto de Matemáticas Aplicadas de Grenoble (IMAG), en Francia, que se dedica a la investigación, creación y desarrollo de software educativo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Fue con el equipo EIAH, en el Laboratorio Leibniz, en donde tuvo lugar la estancia posdoctoral que me otorgó Conacyt durante el año lectivo 97-98. La dirección de la página en Internet del equipo EIAH es la siguiente: <http://www-eiah.imag.fr> .

2. El proyecto de investigación: "Desarrollo del Lenguaje Algebraico a través de Manipulaciones Geométricas en un Medio Ambiente Informático de Aprendizaje", presentado por Hoyos, V. al Conacyt en mayo de 1997, obtuvo financiamiento y fue llevado a cabo en el marco de realización de la estancia posdoctoral que realizó la Dra. Hoyos en el Laboratorio Leibniz del IMAG (Instituto de Matemáticas Aplicadas de Grenoble) -Francia, con el equipo EIAH (Medios-Ambientes Informáticos para el Aprendizaje Humano).

3. Cabri-Géomètre II, es de hecho un medio ambiente informático de aprendizaje interactivo, de manipulación directa de los objetos matemáticos que el usuario construye. Cabri-II inicialmente fue elaborado -por algunos de los miembros del equipo EIAH- para la enseñanza de la geometría - desde las propiedades geométricas más elementales hasta la geometría hiperbólica; sin embargo, actualmente se le han encontrado aplicaciones en otros dominios matemáticos distintos, como son la probabilidad, la física y el álgebra. Cabri-II ha tenido aceptación mundial por el soporte matemático importante que presta al usuario durante sus ejecuciones. La página de Cabri en internet es: <http://www-cabri.imag.fr>

4. Cf. Hoyos, V. y Capponi, B.(1998c). "Mathematical Experience within Cabri-II Microworld: Construction and Interpretation of Algebraic Expressions", por aparecer en las Memorias de la Conferencia Internacional MSET'99. Texas: Universidad de San Antonio.

5. Aquí se está haciendo referencia al proyecto de investigación: "Desarrollo del Lenguaje Algebraico a través de Manipulaciones Geométricas en un Medio Ambiente Informático de Aprendizaje". Para más información, ver referencia de la Nota 2.